N° d'enregistrement
au C.N.R.S.

A.O. 8379

Article principal
recouvrant en partie

LA THESE présentée
pour l'obtention

du grade de DOCTEUR ES SCIENCES

PHYSIQUES
A L'UNIVERSITE DE PARIS VI

par Madame ROBLIN Marie-Louise

Sujet de la thèse: MODULATION SPATIALE D'INTENSITE PRODUITE PAR L'ASSOCIATION DE DEUX RESEAUX PARALLELES.

Soutenue le: 22 mai 1973

devant la Commission d'examen composée de :

- M. FRANÇON Président
- M. LOWENTHAL examinateur
- M. MARECHAL
- M. VIENOT

N° d'enregistrement
au C.N.R.S.
A.O. 8379

Article principal
recouvrant en partie

LA THESE présentée
pour l'obtention

du grade de DOCTEUR ES SCIENCES

PHYSIQUES

A L'UNIVERSITE DE PARIS VI

par Madame ROBLIN Marie-Louise

Sujet de la thèse: MODULATION SPATIALE D'INTENSITE PRODUITE PAR L'ASSOCIATION DE DEUX RESEAUX PARALLELES.

Soutenue le: 22 mai 1973

devant la Commission d'examen composée de :

- M. FRANÇON Président
- M. LOWENTHAL examinateur
- M. MARECHAL
- M. VIENOT

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Nouv. Rev. Optique appliquée, 1972, t. *3*, n° 5 pp. 253-261

INSTITUT D'OPTIQUE. LABORATOIRE D'OPTIQUE

9, quai Saint-Bernard — F. 75-Paris 5e

MODULATION D'INTENSITÉ DANS LES IMAGES MULTIPLES D'UNE SOURCE LUMINEUSE DONNÉES PAR UN SYSTÈME DE DEUX RÉSEAUX PARALLÈLES

par

M.-L. ROBLIN

MOTS CLÉS :
Réseaux
Franges rectilignes

KEY WORDS :
Gratings
Straight-line fringes

RÉSUMÉ

Deux réseaux par transmission placés parallèlement l'un à l'autre sont utilisés pour moduler spatialement par des franges rectilignes une source incohérente de dimensions limitées. On étudie le cas de deux réseaux identiques en lumière monochromatique. On donne également quelques résultats concernant l'observation en lumière blanche.

1. — INTRODUCTION

Les associations de réseaux parallèles donnent des phénomènes de franges rectilignes, qui ont été observés et étudiés par différents auteurs dans le cas de deux ou plusieurs réseaux [1], [2]. D'autre part des applications ont été envisagées dans différents domaines, par exemple, en interférométrie en lumière cohérente [3], ou incohérente [4], ainsi qu'en spectrométrie [5], [6].

Dans un travail précédent [7], nous avons traité le cas d'un système de deux réseaux parallèles, en éclairage incohérent, pour étudier en particulier les possibilités de modulation d'intensité lumineuse en lumière blanche. Nous considérons ici le même système de deux réseaux, mais nous utilisons une source limitée dans un plan différent de celui de chaque réseau (degré de cohérence non nul sur le premier réseau) et étudions la modulation d'intensité qui en résulte dans la source elle-même, ou dans un plan optiquement conjugué. Nous traiterons le cas particulier d'une source à l'infini. Il faut alors calculer, pour un point de la source, le spectre obtenu après double diffraction par les réseaux. Nous supposerons la source limitée de telle sorte que les images diffractées dans les différents ordres ne se recoupent pas : de cette séparation dans l'espace découlent des propriétés particulières intéressantes que nous allons étudier. Cependant il faut remarquer que les résultats obtenus en éclairage incohérent doivent être retrouvés à la limite lorsqu'on augmente indéfiniment les dimensions de la source.

2. — ÉTUDE THÉORIQUE

2.1. — Généralités. Schéma de montage (fig. 1)

La source à moduler, S, spatialement incohérente, mais supposée dans un premier temps quasi monochromatique, est placée au foyer d'un objectif O_1 ; son image est ensuite donnée par un second objectif, O_2. Entre les deux objectifs on place un système de deux réseaux parallèles. L'image de la source S dans le plan focal de O_2 est formée de plusieurs images séparées, correspondant aux différents ordres de diffraction possibles. Sous certaines conditions, que nous allons préciser, ces différentes images comportent des franges rectilignes équidistantes dont la fréquence et le contraste varient suivant l'image considérée.

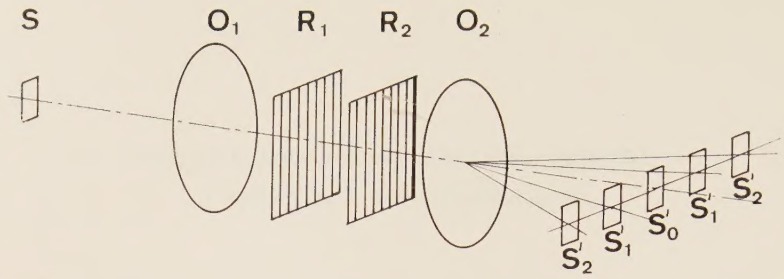


FIG. 1. — *On observe dans le plan focal de O_2 une série d'images diffractées de la source S.*

FIG. 1. — *A series of diffracted images of the source S are observed in the focal plane of O_2.*

Pour qu'un tel aspect soit observé, il faut que les ondes provenant d'un point donné de la source, mais ayant subi sur chacun des réseaux des diffractions d'ordre différent, donnent dans le plan image le même point et puissent ainsi interférer. Mathématiquement, l'amplitude lumineuse produite par un point de la source est obtenue sous la forme d'une somme de fonctions δ : deux (ou plusieurs) d'entre elles peuvent être identiques, sous certaines conditions concernant le pas des réseaux et les ordres de diffraction possibles ; leurs coefficients s'ajoutent, donnant ainsi un phénomène d'interférences. C'est à ce stade du calcul que l'on doit définir les conditions particulières permettant un regroupement des termes ; l'intensité sera alors calculée séparément pour chaque fonction δ.

2.2. — Calcul de l'amplitude pour un point de la source

Les notations utilisées sont définies sur la figure 2. Soient R_1, R_2 les deux réseaux parallèles, de pas p_1 et p_2 ; d est la distance entre les deux réseaux. La source S est placée dans le plan focal objet de l'objectif O_1. S'_0 est l'image donnée par l'objectif O_2 dans son plan focal image en l'absence des réseaux.

En raison des symétries du système, le calcul peut être effectué à une dimension.

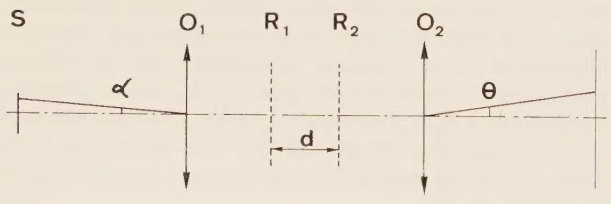


FIG. 2. — *Notations utilisées* :

α : *abscisse angulaire d'un point de la source,*
X : *abscisse d'un point du réseau R_1,*
x : *abscisse d'un point du réseau R_2,*
θ : *abscisse angulaire d'un point du plan focal de O_2.*

FIG. 2. — *Notations used* :

α : *angular abscissa of a point on the source,*
X : *abscissa of a point on the grating R_1,*
x : *abscissa of a point on the grating R_2,*
θ : *angular abscissa of a point in the focal plane of O_2.*

Nous désignerons par :

α : l'abscisse angulaire d'un point de la source,
X : l'abscisse d'un point du réseau R_1,
x : l'abscisse d'un point du réseau R_2,
θ : l'abscisse angulaire d'un point du plan focal de O_2.

Nous supposerons, ce qui correspond à nos conditions expérimentales, que les transparences en amplitude $T_1(X)$ et $T_2(x)$ de R_1 et R_2 sont des fonctions développables en série de Fourier :

$$T_1(X) = \sum_{n_1=0}^{+\infty} a_{n_1} \cos(n_1\, 2\pi X/p_1)$$

$$T_2(x) = \sum_{n_2=0}^{+\infty} b_{n_2} \cos(n_2\, 2\pi x/p_2)$$

où $a_0, \ldots, a_{n_1}, b_0, \ldots, b_{n_2}$ sont des nombres réels.

Les transformées de Fourier de ces fonctions, $t_1(u)$ et $t_2(u)$, sont de la forme

$$t_1(u) = \sum_{n_1=0}^{+\infty} \frac{a_{n_1}}{2} \left[\delta\left(u - \frac{n_1}{p_1}\right) + \delta\left(u + \frac{n_1}{p_1}\right)\right]$$

$$t_2(u) = \sum_{n_2=0}^{+\infty} \frac{b_{n_2}}{2} \left[\delta\left(u - \frac{n_2}{p_2}\right) + \delta\left(u + \frac{n_2}{p_2}\right)\right].$$

Soit, pour un point α de la source, $\mathcal{A}_2(x)$ l'amplitude lumineuse obtenue à la sortie du réseau R_2. L'amplitude dans le plan focal de O_2 s'obtient à partir de la transformée de Fourier $f(u)$ de $\mathcal{A}_2(x)$, en définissant u par la relation $u = \theta/\lambda$. On a la relation

$$(1) \qquad f(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}_2(x) \exp(-\,i\, 2\pi u x)\, dx\,.$$

Pour définir $\mathcal{A}_2(x)$, nous calculons d'abord $\mathcal{A}_1(X)$, amplitude à la sortie du réseau R_1, qui permet d'obtenir $\mathcal{A}'_1(x)$, amplitude reçue dans le plan du réseau R_2 telle que

$$(2) \qquad \mathcal{A}_2(x) = T_2(x)\, \mathcal{A}'_1(x)\,.$$

On peut écrire $\mathcal{A}_1(X) = \exp\left(i\, 2\pi \frac{\alpha}{\lambda} X\right) T_1(X)$ où α définit un point de la source S. $\mathcal{A}_1(X)$ a pour transformée de Fourier $t_1(u - \alpha/\lambda)$. La transformée de Fourier de $\mathcal{A}'_1(X)$, amplitude de la distance d, s'en déduit, sous la forme

$$t_1(u - \alpha/\lambda) \exp(-\,i\pi\lambda d u^2)\,.$$

On déduit alors de l'équation (2) l'expression de $f(u)$, définie par (1)

$$f(u) = t_1(u - \alpha/\lambda) \exp(-i\pi\lambda d u^2) \otimes t_2(u)$$

où $\otimes$ indique un produit de convolution.

En tenant compte des expressions de t_1 et t_2, on montre que l'on a :

$$(3)\quad f(u) = \sum_{n_1=0}^{+\infty} \sum_{n_2=0}^{+\infty} \frac{a_{n_1} b_{n_2}}{4} \left\{ \left[\delta\left(u + \frac{n_1}{p_1} + \frac{n_2}{p_2} - \frac{\alpha}{\lambda}\right) + \delta\left(u - \frac{n_1}{p_1} + \frac{n_2}{p_2} - \frac{\alpha}{\lambda}\right) \right] \exp\left[- i\pi\lambda d \left(u + \frac{n_2}{p_2}\right)^2 \right] + \right.$$
$$\left. + \left[\delta\left(u + \frac{n_1}{p_1} - \frac{n_2}{p_2} - \frac{\alpha}{\lambda}\right) + \delta\left(u - \frac{n_1}{p_1} - \frac{n_2}{p_2} - \frac{\alpha}{\lambda}\right) \right] \exp\left[- i\pi\lambda d \left(u - \frac{n_2}{p_2}\right)^2 \right] \right\}.$$

Pour discuter les conditions d'interférence, il est commode de donner $f(u)$ sous la forme la plus générale

$$f(u) = \sum_{n_1'=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_2'=-\infty}^{+\infty} C_{n_1' n_2'} \, \delta\left(u - \frac{\alpha}{\lambda} - \frac{n_1'}{p_1} - \frac{n_2'}{p_2}\right) \times$$
$$\times \exp\left[- i\pi\lambda d \left(u - \frac{n_2'}{p_2}\right)^2 \right]$$

où n_1', n_2' sont des entiers *positifs, négatifs ou nuls* caractérisant les ordres de diffraction sur R_1 et R_2 respectivement, $C_{n_1' n_2'}$, étant une constante calculable à partir des coefficients $a_{n_1'}, b_{n_2'}$.

La condition pour qu'il y ait coïncidence entre deux fonctions δ correspondant à deux couples différents (n_1', n_2') et (m_1', m_2') de nombres entiers s'écrit alors simplement

$$(4)\qquad n_1'/p_1 + n_2'/p_2 = m_1'/p_1 + m_2'/p_2 .$$

Cette condition peut d'ailleurs se trouver réalisée pour plusieurs couples différents de nombres n_1', n_2'. Cependant en pratique les coefficients a_n décroissent rapidement lorsque n croît : les principaux phénomènes d'interférence seront dus aux plus faibles valeurs de n_1' et n_2'.

Pour le calcul de l'intensité, il est maintenant nécessaire de préciser les valeurs relatives de p_1 et p_2 afin de regrouper les termes correspondant à une même fonction δ, c'est-à-dire à un même point du plan d'observation. Nous étudierons particulièrement le cas $p_1 = p_2 = p$ correspondant à deux réseaux de même pas, que nous supposerons de plus parfaitement identiques.

3. — CAS PARTICULIER $p_1 = p_2 = p$: CALCUL DE L'INTENSITÉ ET VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE

3.1. — Expression de l'amplitude pour un point de la source

Dans le cas de deux réseaux identiques, la condition (4) s'écrit simplement

$$(n_1' + n_2')/p = (m_1' + m_2')/p = N/p$$

c'est-à-dire

$$n_1' + n_2' = m_1' + m_2' .$$

Notons que dans ce cas les ondes sont diffractées à la sortie du système dans des angles multiples de λ/p. On peut donc définir un ordre de diffraction N pour l'ensemble des deux réseaux, correspondant à une déviation $N\lambda/p$.

On peut remarquer d'autre part que la condition d'interférence sera toujours remplie pour les couples (n_1', n_2') et (n_2', n_1') obtenus en inversant l'ordre des diffractions subies par l'onde sur les deux réseaux, n_1' et n_2' étant des nombres différents (fig. 3). Cette constatation nous amène à modifier les symboles utilisés dans l'expression de $f(u)$: on appellera n, m, deux entiers différents caractérisant les ordres de diffraction pour une onde donnée, chacun des nombres pouvant correspondre indifféremment à R_1 ou à R_2. On obtient alors

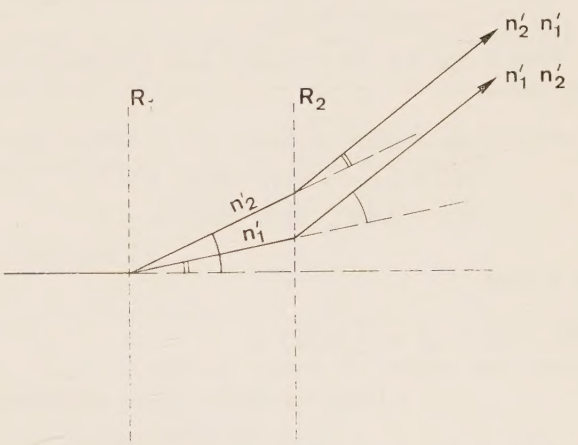


FIG. 3. — *On obtient la même direction à la sortie du système si l'on inverse l'ordre des diffractions, pour deux réseaux identiques.*

FIG. 3. — *The light emerges from the system in the same direction even when the order of diffraction is reversed, the two gratings being identical.*

$$(5)\quad f(u) = \sum (a_n\, a_m/4)\,\{\,\delta[u + (n+m)/p - \alpha/\lambda]\,(\exp[-\,i\pi\lambda d(u + n/p)^2] + \exp[-\,i\pi\lambda d(u + m/p)^2]) +$$
$$+\,\delta[u + (n-m)/p - \alpha/\lambda]\,(\exp[-\,i\pi\lambda d(u + n/p)^2] + \exp[-\,i\pi\lambda d(u - m/p)^2])$$
$$+\,\delta[u - (n-m)/p - \alpha/\lambda]\,(\exp[-\,i\pi\lambda d(u - n/p)^2] + \exp[-\,i\pi\lambda d(u + m/p)^2])$$
$$+\,\delta[u - (n+m)/p - \alpha/\lambda]\,(\exp[-\,i\pi\lambda d(u - n/p)^2] + \exp[-\,i\pi\lambda d(u - m/p)^2])\,\}$$
$$+ \sum (a_n^2/4)\,\{\,\delta(u - \alpha/\lambda)\,(\exp[-\,i\pi\lambda d(u + n/p)^2] + \exp[-\,i\pi\lambda d(u - n/p)^2])$$
$$+\,\delta(u + 2\,n/p - \alpha/\lambda)\exp[-\,i\pi\lambda d(u + n/p)^2]$$
$$+\,\delta(u - 2\,n/p - \alpha/\lambda)\exp[-\,i\pi\lambda d(u - n/p)^2]\,\}\,.$$

Dans cette expression, n et m représentent deux nombres *entiers*, *positifs* ou *nuls*, différents.

Nous regrouperons alors les fonctions δ correspondant à un même ordre N et écrirons $f(u)$ sous la forme

$$(6)\quad f(u) = \sum [\mathcal{A}_{(N)}\,\delta(u - \alpha/\lambda - N/p) + \mathcal{A}_{(-N)}\,\delta(u - \alpha/\lambda + N/p)]$$

(N étant pris en valeur absolue).

Pour N *différent de* 0, les termes $\delta(u - \alpha/\lambda - N/p)$ sont obtenus à partir de certains termes de l'expression (5) :

— $\delta[u - (n-m)/p - \alpha/\lambda]$, où $n - m = N$, correspondant à des couples de valeurs $(n, n+N)$;
— $\delta[u - (n+m)/p - \alpha/\lambda]$, où $n + m = N$, correspondant à des couples de valeurs $(n, N-n)$;
— $\delta[u - 2\,n/p - \alpha/\lambda]$, où $2\,n = N$, dans le cas de valeurs paires de N, ce qui correspond au couple de valeurs $(N/2, N/2)$.

On obtient en définitive pour $\mathcal{A}_N$, amplitude diffractée dans l'ordre $+N$,

$$(7)\quad \mathcal{A}_N = \sum (a_n\, a_{n+N}/4)\,\{\exp(-\,i\pi\lambda d[u - (n+N)/p]^2) + \exp(-\,i\pi\lambda d[u + n/p]^2)\} +$$
$$+ \sum (a_n\, a_{N-n}/4)\,\{\exp(-\,i\pi\lambda d[u - (N-n)/p]^2) + \exp(-\,i\pi\lambda d[u + n/p]^2)\}$$
$$+ (a_{N/2}^2/4)\exp(-\,i\pi\lambda d[u - N/2\,p]^2)\,.$$

L'expression de $\mathcal{A}_{(-N)}$ s'obtient en changeant p en $-p$ dans l'expression de $\mathcal{A}_{(N)}$.

Pour N *égal à* 0, on considère dans l'expression (5) les termes

$$\delta(u - \alpha/\lambda)$$
$$\delta(u + 2\,n/p - \alpha/\lambda) \quad \text{pour} \quad n = 0$$
$$\delta(u - 2\,n/p - \alpha/\lambda) \quad \text{pour} \quad n = 0$$

et il vient :

$$(8)\quad \mathcal{A}_0 = a_0^2 + \sum (a_n^2/2) \times \left[\exp(-\,i\pi\lambda d n^2/p^2)\right] \cos n(2\,\pi\lambda d u/p)$$

où n est un entier supérieur ou égal à 1.

3.2. — Intensité lumineuse dans le plan de la source

L'intensité lumineuse doit être calculée pour chaque fonction δ ainsi définie. Dans l'ordre $+N$ en particulier, on écrit

$$I_N = \mathcal{A}_N\, \mathcal{A}_N^*\, \delta(u - N/p - \alpha/\lambda)\,.$$

Si $S(\alpha)$ représente l'intensité de la source au point α, pour l'ensemble de la source, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}_N\, \mathcal{A}_N^*\, S(\alpha)\, \delta(u - N/p - \alpha/\lambda)\, d\alpha$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{A}_N\, \mathcal{A}_N^*\, S[\lambda(u - N/p)]$$

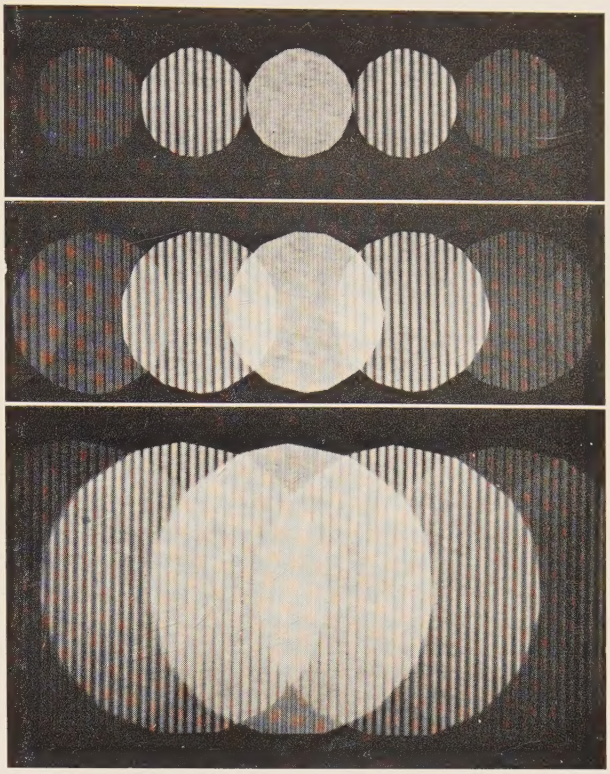
($\mathcal{A}_N\, \mathcal{A}_N^*$ étant indépendant de α)

ce qui signifie simplement que la répartition d'intensité définie par $\mathcal{A}_N\, \mathcal{A}_N^*$ est limitée dans le plan image par l'image diffractée d'ordre $+N$ de la source S.

REMARQUE : si S croît indéfiniment, l'intensité totale est égale simplement à $\sum \mathcal{A}_N\, \mathcal{A}_N^*$ et l'on doit retrouver ici les résultats obtenus en éclairage incohérent des deux réseaux [7].

Il faut pour cela regrouper les termes d'une fréquence donnée dans tous les ordres de diffraction N ; chacun de ces termes résulte en général, pour un ordre donné, d'une somme infinie de termes. Il en résulte que le calcul est pratiquement compliqué, bien que sans difficulté théorique particulière.

Nous considérons ici que les différentes images sont



(a)

(b)

(c)

FIG. 4. — *Recouvrement des images par élargissement de la source* :

a) *images séparées,*
b) *les images se recouvrent deux à deux,*
c) *les images se recouvrent trois à trois.*

FIG. 4. — *Overlapping of the images by enlarging the source* :

a) *images are separated,*
b) *images overlap, two at a time,*
c) *images overlap, three at a time.*

séparées, ce qui revient à séparer dans l'espace les différents termes $\mathcal{A}_N\,\mathcal{A}_N^*$.

La figure 4 montre dans le cas d'une source limitée dont on augmente progressivement les dimensions la superposition progressive des intensités dans les zones communes, et les modifications qui en résultent sur l'aspect des franges.

3.2.1. — Intensité observée dans l'ordre 0. — On obtient dans l'image centrale une intensité lumineuse modulée de la forme

$$(9)\qquad \mathcal{A}_0\,\mathcal{A}_0^* = a_0^4 + \sum (a_n^4/8) + \sum (a_n^4/8)\cos 2\,n(2\,\pi\theta d/p) + a_0^2 \sum a_n^2 \cos n^2(\pi\lambda d/p^2)\cos n(2\,\pi\theta d/p) + \\ + \sum (a_n^2\,a_m^2/4)\cos (n^2 - m^2)\,(\pi\lambda d/p^2)\left[\cos (n + m)\,(2\,\pi\theta d/p) + \cos (n - m)\,(2\,\pi\theta d/p)\right].$$

On observe dans l'ordre 0 des termes modulés de deux espèces :

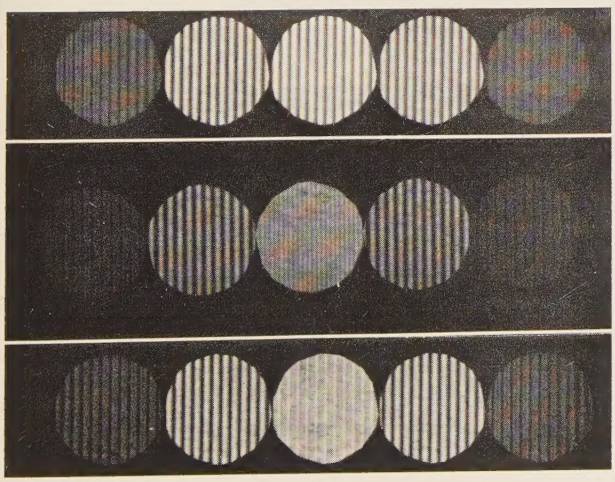
— termes achromatiques de la forme

$$(a_n^4/8)\cos 2\,n(2\,\pi\theta d/p)\,,$$

correspondant à des multiples pairs de la fréquence fondamentale $\nu_0 = d/p$. Le terme principal est

$$(a_1^4/8)\cos 2(2\,\pi\theta d/p)$$

de fréquence $2\,\nu_0$;



(a)

(b)

(c)

FIG. 5. — *Différents aspects des franges dans l'ordre central* :

a) *fréquence fondamentale,*
b) *fréquence double,*
c) *aspect intermédiaire.*

FIG. 5. — *Different aspects of fringes in the central order* :

a) *fundamental frequency,*
b) *frequency twice the fundamental,*
c) *intermediate aspect.*

— termes de fréquence achromatique, mais de contraste chromatique, dépendant de λ par un facteur de la forme $\cos K(\pi\lambda d/p^2)$ où K est une constante.

En lumière monochromatique, ce terme produit une variation de contraste en fonction de la distance d des deux réseaux.

En lumière blanche l'intégration par rapport à λ entraîne la disparition du terme à contraste chromatique, et seuls les termes achromatiques de fréquence double persistent.

La figure 5 montre, en lumière monochromatique, différents aspects observés dans l'ordre 0 pour différentes valeurs de d. La fréquence fondamentale est toujours en évidence dans le premier ordre, nous le montrerons par la suite, alors qu'on observe dans l'ordre 0 le passage de la fréquence fondamentale à la fréquence double.

Notons que le phénomène observé dans l'ordre 0 est qualitativement identique à celui obtenu en éclairage totalement incohérent [7].

3.2.2. — Intensité observée dans un ordre N différent de 0. — On obtient pour $\mathcal{A}_N \mathcal{A}_N^*$ une expression assez compliquée, surtout pour les valeurs paires de N, de la forme

$$
\begin{aligned}
(10)\qquad \mathcal{A}_N \mathcal{A}_N^* = {} & \sum_{n=N}^{+\infty} (a_n^2\, a_{n-N}^2/8) \left\{ 1 + \cos\left[(2n - N)(2\pi d\theta/p - N\pi\lambda d/p^2)\right] \right\} + \\
& + \sum_{n'>N/2}^{N} (a_{n'}^2\, a_{N-n'}^2/8) \left\{ 1 + \cos\left[(2n' - N)(2\pi d\theta/p - N\pi\lambda d/p^2)\right] \right\} + (a_{N/2}^4/16) \\
& + \sum_{n=N}^{+\infty} \sum_{m=N, n>m}^{+\infty} (a_n\, a_{n-N}\, a_m\, a_{m-N}/4) \cos\left[(\pi\lambda d/p^2)(n + m - N)(n - m)\right] \\
& \times \left\{ \cos\left[(n + m - N)(2\pi d\theta/p - N\pi\lambda d/p^2)\right] + \cos\left[(n - m)(2\pi d\theta/p - N\pi\lambda d/p^2)\right] \right\} \\
& + \sum_{n'>N/2}^{N} \sum_{m'>N/2, n'>m'}^{N} (a_{n'}\, a_{N-n'}\, a_{m'}\, a_{N-m'}/4) \cos\left[(\pi\lambda d/p^2)(n' + m' - N)(n' - m')\right] \\
& \times \left\{ \cos\left[(n' + m' - N)(2\pi d\theta/p - N\pi\lambda d/p^2)\right] + \cos\left[(n' - m')(2\pi d\theta/p - N\pi\lambda d/p^2)\right] \right\} \\
& + \sum_{n=N}^{+\infty} \sum_{n'>N/2, n>n'}^{N} (a_n\, a_{n-N}\, a_{n'}\, a_{N-n'}/4) \cos\left[(\pi\lambda d/p^2)(n + n' - N)(n - n')\right] \\
& \times \left\{ \cos\left[(n + n' - N)(2\pi d\theta/p - N\pi\lambda d/p^2)\right] + \cos\left[(n - n')(2\pi d\theta/p - N\pi\lambda d/p^2)\right] \right\} \\
& + (a_{N/2}^2/4) \sum_{n=N}^{+\infty} a_n\, a_{n-N} \cos\left[(\pi\lambda d/p^2)(n - N/2)^2\right] \cos\left[(n - N/2)(2\pi d\theta/p - N\pi\lambda d/p^2)\right] \\
& + (a_{N/2}^2/4) \sum_{n'>N/2}^{N} a_{n'}\, a_{N-n'} \cos\left[(\pi\lambda d/p^2)(n' - N/2)^2\right] \cos\left[(n' - N/2)(2\pi d\theta/p - N\pi\lambda d/p^2)\right].
\end{aligned}
$$

Dans cette expression n, n', m, m' représentent des nombres entiers positifs ou nuls.

L'expression générale obtenue dans un ordre N quelconque permet de noter certaines caractéristiques différentes de celles obtenues dans l'ordre 0 ; cependant les termes modulés ont une fréquence multiple de la fréquence $\nu_0 = d/p$, quel que soit l'ordre considéré, comme dans l'ordre central.

On remarque en premier lieu que l'on peut définir pour N donné une *origine commune* pour laquelle tous les termes sont en phase. Cette origine correspond à $\theta = N\lambda/2\,p$, égal au demi-angle de diffraction pour

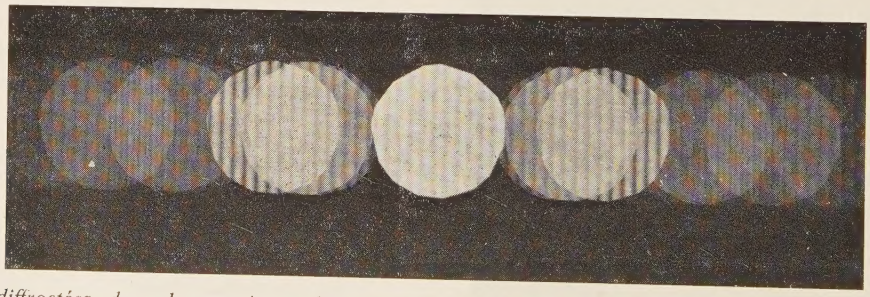


FIG. 6. — *Images diffractées dans le premier ordre pour trois longueurs d'onde* (548 mμ, 436 mμ et 405 mμ du spectre du mercure).

FIG. 6. — *Diffracted images in the first order for three wavelengths* (546 mμ, 436 mμ and 405 mμ of mercury spectrum).

l'ordre N considéré ; cette origine est variable avec la longueur d'onde. Ce phénomène est mis en évidence sur la figure 6 où l'on a utilisé une source dont le spectre comporte plusieurs raies. On observera dans le premier ordre les images de la source correspondant aux différentes longueurs d'onde : aux limites de ces images on observe un décrochement des franges dû à la variation d'origine en fonction de λ.

Certains termes, et parmi eux les termes principaux du moins pour les faibles valeurs de N, ne comportent pas de facteur de contraste chromatique et ne dépendent de la longueur d'onde que par cette origine de phase. Par exemple, dans le premier ordre diffracté, le terme $a_0^2\, a_1^2 \cos(2\pi\theta d/p - \pi\lambda d/p^2)$ est le terme principal. En lumière monochromatique, ce terme produit, par variation de d, *une modulation à fréquence variable et à contraste constant*. On montre d'autre part que le contraste des franges ainsi obtenues est voisin de 1 : c'est un avantage certain par rapport au montage en éclairage totalement incohérent qui produit dans les mêmes conditions une modulation à contraste faible, et variable avec la distance des réseaux. L'explication de ce phénomène est simple : en effet les résultats en éclairage incohérent s'obtiennent en ajoutant les termes obtenus dans tous les ordres N. Il faut donc associer au terme

$$a_0^2\, a_1^2 \cos(2\pi\theta d/p - \pi\lambda d/p^2)$$

obtenu dans l'ordre + 1 le terme correspondant obtenu dans l'ordre − 1 ; on obtient alors

$$a_0^2\, a_1^2[\cos(2\pi\theta d/p - \pi\lambda d/p^2) + \cos(2\pi\theta d/p + \pi\lambda d/p^2)] = 2\, a_0^2\, a_1^2 \cos(\pi\lambda d/p^2) \cos(2\pi\theta d/p$$

et le terme de phase $\pi\lambda d/p^2$ devient ainsi un terme d'amplitude, variant sinusoïdalement en fonction de d. L'abaissement du contraste provient quant à lui de l'augmentation du fond continu par addition du terme a_0^4 figurant dans l'ordre 0, et prépondérant en raison de la forte valeur relative de a_0 par rapport aux autres coefficients.

Les avantages obtenus avec une source limitée proviennent donc du fait qu'elle permet de séparer dans l'espace les différents termes modulés.

3.3. — Résultats expérimentaux dans un ordre de diffraction quelconque

L'expérience a été effectuée en lumière monochromatique avec deux réseaux identiques de pas 0,01 mm, à traits alternativement noirs et blancs de largeurs sensiblement égales : ce cas particulier est intéressant car on peut montrer à partir de (10), en tenant compte de l'existence des seuls termes impairs dans le spectre de diffraction d'un tel réseau, que si N est impair, on obtient une expression simple de la forme

$$(a_0^2\, a_N^2/2)\,[1 + \cos N(2\pi\theta d/p - N\pi\lambda d/p^2)]$$

qui indique que l'on doit observer, dans tous les ordres N impairs, une modulation sinusoïdale de contraste 1 et de fréquence Nv_0. L'expression pour N pair ne prend pas une forme simple. Cependant on peut montrer qu'elle ne comporte pas de termes de fréquence fondamentale v_0.

Le spectre utilisé (fig. 7) ne répond pas exactement à cette définition ; il comporte en effet des termes d'ordre

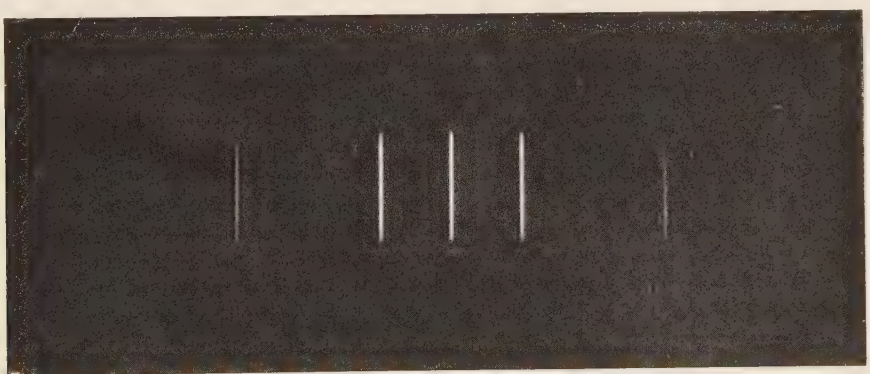


FIG. 7. — *Spectre de diffraction du réseau.* FIG. 7. — *Diffraction pattern of the grating.*

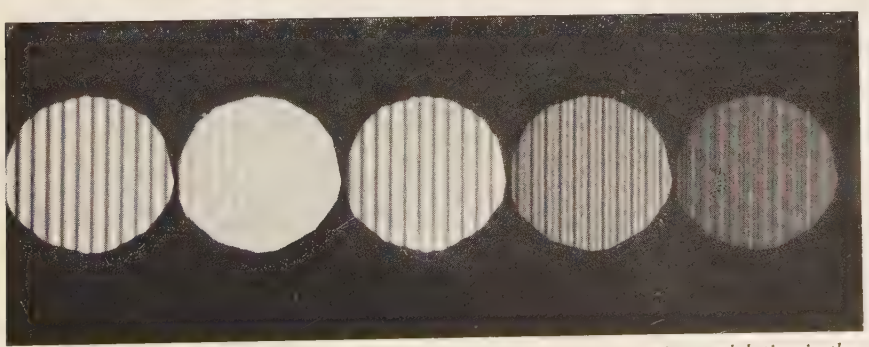


FIG. 8. — *Modulation d'intensité dans les ordres* $N = 0, 1, 2, 3$. FIG. 8. — *Intensity modulation in the orders* $N = 0, 1, 2, 3$.

pair non nuls (en particulier dans le second ordre) bien que fortement atténués. Les résultats expérimentaux obtenus dans ces conditions sont donnés sur la figure 8, où l'on peut observer les images diffractées d'ordre 0, 1, 2, 3, pour la longueur d'onde $\lambda = 546$ mμ du mercure.

Dans l'ordre 0, on observe comme nous l'avons déjà indiqué, la superposition des fréquences 1 et 2, et dans l'ordre 1 la fréquence fondamentale prévue par la théorie est seule observée. Par contre dans l'ordre 2 et dans l'ordre 3, les fréquences $2\,\nu_0$ et $3\,\nu_0$ respectivement apparaissent superposées à un terme de fréquence fondamentale ν_0. L'expérience montre, dans ces deux cas, que l'on peut, par variation de d, faire disparaître le terme de fréquence ν_0, ce qui prouve que ce terme est affecté d'un facteur de contraste chromatique. L'existence de ce terme peut être retrouvée par la formule (10) en tenant compte du terme de diffraction non nul dans le second ordre dans le spectre de diffraction du réseau. On montre qu'il est de la forme

$$(a_0\, a_1^2\, a_2/2) \cos(\pi\lambda d/p^2) \cos(2\,\pi d\theta/p - 2\,\pi\lambda d/p^2)$$

pour $N = 2$

$$(a_0\, a_1\, a_2\, a_3/2) \cos(2\,\pi\lambda d/p^2) \cos(2\,\pi d\theta/p - 3\,\pi\lambda d/p^2)$$

pour $N = 3$.

4. — OBSERVATION EN LUMIÈRE BLANCHE

Nous avons vu dans le cas de l'éclairage incohérent [7] que l'intensité obtenue, par intégration par rapport à λ, d'un terme de la forme $\cos(K\pi\lambda d/p^2)$ donne une valeur qui tend vers 0 si le coefficient $(K\pi d/p^2)$ est assez grand, et les termes correspondant n'interviennent plus pour moduler l'intensité résultante. Il en est naturellement de même si l'on considère un terme dépendant de λ par un terme de phase, de la forme

$$\cos(2\,\pi d\theta/p - \pi\lambda d/p^2)$$

la modulation correspondante étant également supprimée, dans les mêmes conditions, pour une observation en lumière blanche.

Cependant, dans le cas de sources limitées, et pour un ordre de diffraction non nul, le phénomène est différent. En effet les bornes d'intégration ne sont plus déterminées simplement par l'étendue du spectre utile, qui dépend à la fois de la source et de la sensibilité du récepteur. En raison du décalage dans l'espace des images de la source correspondant aux différentes longueurs d'onde, on doit définir en chaque point un intervalle différent de longueurs d'onde utiles. Visuellement on distingue dans chaque ordre une partie « blanche » commune à toutes les images données par les longueurs d'onde existant dans le spectre, à domaine d'intégration constant, et de part et d'autre une zone à coloration variable, et à domaine d'intégration variable. L'aspect observé dans ces zones colorées est lié à la forme du diaphragme utilisé. Dans notre expérience, le diaphragme est circulaire et produit un aspect de franges courbes et larges particulièrement dans le premier ordre (fig. 9 *a*).

Dans les zones « blanches », l'atténuation du terme de fréquence fondamentale laisse apparaître un système de franges achromatiques de fréquence double (également observable dans le deuxième ordre diffracté). La possibilité d'observer de tels systèmes achromatiques n'apparaît pas dans l'expression (10) de $\mathcal{A}_N\, \mathcal{A}_N^*$. En réalité, pour le raisonnement en lumière non monochromatique, il est nécessaire d'écrire différemment les termes comportant à la fois un terme de phase et un terme de contraste fonction de λ En effet les termes de la forme

$$\cos(K_1\,\pi\lambda d/p^2) \cos K_2(2\,\pi\theta d/p - N\pi\lambda d/p^2)$$

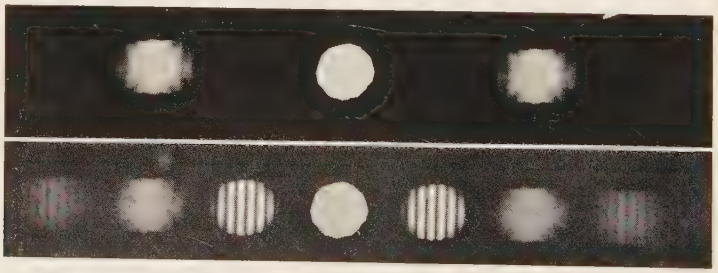
où K_1 et K_2 sont des constantes, peuvent être écrits

$$\tfrac{1}{2}\{\cos[K_2\,2\,\pi\theta d/p - (NK_2 + K_1)(\pi\lambda d/p^2)] + \cos[K_2\,2\,\pi\theta d/p - (NK_2 - K_1)(\pi\lambda d/p^2)]\}.$$

Les différentes constantes étant positives, on voit qu'il peut exister des termes achromatiques si l'on a

$$NK_2 - K_1 = 0.$$

Une étude détaillée des termes permet de justifier ainsi l'existence de termes achromatiques dans le cas particulier étudié.



(a)

(b)

FIG. 9. — *Observation with a source of continuous spectrum*:
a) *for two identical gratings,*
b) *the period of the second grating is twice that of the first : achromatic fringes in the first diffracted order.*

FIG. 9. — *Observation pour une source à spectre continu*:
a) pour deux réseaux identiques,
b) le second réseau a un pas double du pas du premier réseau; franges achromatiques dans le premier ordre diffracté.

Nous avons étudié de même le cas particulier où $p_1 = p_2/2$. On peut montrer que, dans ce cas, pour un même réseau R_1 et un réseau R_2 de pas double, on obtient la même fréquence fondamentale que dans le cas $p_1 = p_2$, et les franges sont achromatiques dans le premier ordre diffracté. La figure 9 *b* montre les résultats obtenus en remplaçant dans le montage le réseau R_2 par un réseau de pas double, toutes choses égales par ailleurs. La fréquence fondamentale achromatique est observée dans le premier ordre, et la comparaison des clichés 9 *a* et 9 *b* permet alors de vérifier l'existence d'une fréquence double achromatique dans les images diffractées de 9 *a*.

* * *

BIBLIOGRAPHIE

[1] LAU (E.). — *Ann. der Phys.*, 1948, **2**, p. 417. *Wiss. Ann.*, 1952, **1**, p. 43.
[2] BOUASSE (H.) et CARRIÈRE (Z.). — Diffraction, *Delagrave*, Paris, 1923, p. 239.
[3] LOHMANN (A. W.) et SILVA (D. E.). — *Opt. Commun.*, 1971, **2**, pp. 413-415.
[4] BOURGEON (M. H.) et FORTUNATO (G.). — Optical Instruments and Techniques, Reading 1969, edited by J. Home Dickson, *Oriel Press*, Newcast'e, 1969, pp. 326-330.
[5] LOHMANN (A. W.). — Proceedings of the Conference on Optical Instruments and Techniques, edited by K.J. Habell, London 1961 *Chapman et Hall* London ; 1962 pp. 58-61.
[6] PRAT (R.). — *Optica Acta*, 1971, **18**, pp. 247-268.
[7] ROBLIN (M.-L.). — *Optica Acta*, 1971, **18**, pp. 539-545.

(Manuscrit reçu le 5 juillet 1972.)

Imprimé en France. — Editions MASSON et Cie
Imprimerie JOUVE, 17, rue du Louvre, 75001 Paris